

Gestaltning av mönster

Geometrisk mönster finns nära oss: på kläder, stensättningar och väggar, i arkitektur, natur och konst. För unga elever är det viktigt att få möjlighet att upptäcka upprepade statistiska mönster men också sådana som systematiskt förändras också när det gäller tal. Språkliga beskrivningar ökar medvetenheten om egna upptäckter och förbereder abstraktion. Tankens och språkets dialektiska förhållande blir tydligt. Det man kan uttrycka klart med språket finns väl förankrat i tydliga tankestrukturer.

Att upptäcka, fullfölja och beskriva mönster är att börja generalisera. Hur ska det fortsätta för att förutsättningarna ska stämma? Hur kan det beskrivas? Barn lär sig tidigt att generalisera genom språket. "Nu ska vi äta" eller "ta på dig mössan" är uttryck som små barn förstår tidigt. "Mössan" blir generaliserbart när barn efterhand inser att det rör sig om plagg i allmänhet, inte en särskild mössa och att det hör till det vidare begreppet "kläder".

Att abstrahera och generalisera är grunder i matematiskt tänkande. Att bearbeta iakttagelser språkligt ger grund för symbolhantering. Mönster beskrivs ibland som matematikens hjärtslag och matematik som vetenskapen om mönster.

Tidiga upptäckter

Barn upptäcker tidigt att talen finns i en speciell ordning som ordinaltal. De inser efterhand att ordningen har med antal att göra. Värdet ökar med ett: 1, 2, 3, 4, 5, ..., mönstret generaliseras. Barn inser också tidigt att händer har lika många fingrar, olika personer har lika många fingrar och tår eller att de flesta stolar har fyra ben, de behöver inte räkna. Andra tidiga mönster som barn möter är olika stora öppna kuber eller cylindrar, som kan staplas på varandra eller läggas i varandra.

Vardagsföremål ordnas efter olika kriterier: strumpor, vantar, skor ordnas parvis. Vi har underkläder, långbyxor eller tröjor var för sig. Lång- och kortärmade tröjor delas upp, vi förvarar tjocka och tunna plagg på olika hyllor. Var passar ett föremål in? Vad är lika? Vad är olika?

Att upptäcka regelbundenhet i förändring och använda den för att fortsätta ett mönster visar på förmåga att urskilja likheter och olikheter. Att beskriva det vi upptäckt språkligt och efterhand med symboler, algebraiskt, utvecklar förmågan att berätta om det vi upptäckt. Vi utmanar eleverna att utveckla dessa förmågor.

Vi upplever mönster

Vi sitter i ringen på golvet en av de första skoldagarna i åk 1. Vi klappar knäna med händerna i jämn takt – snart följer alla med. Vi ber elever beskriva vad vi gjorde. "Vi klappade på knäna. Vi klappade i takt. Vi klappade samtidigt". De kompletterar varandras beskrivningar. Vi ändrar och klappar istället i händerna i jämn takt. Eleverna upptäcker förändringen och gör likadant. Koncentrationen är stor.

Proceduren upprepas: beskriv, komplettera osv. Eleverna "fångas" av aktiviteten. De utvecklar förmåga att iaktta och sätta ord på handlingar. Efterhand inför vi fler komponenter. Eleverna upptäcker, fullföljer och beskriver statistiska, upprepade mönster.

Pelle tycker att det behövs många ord för att beskriva. "Vi kan kalla det som kommer först för *ett*, det som kommer sedan *två* osv. Kamraterna tycker om symboliseringen. De beskriver 1, 2, 1, 2... eller med fler delar 1, 2, 3, 1, 2, 3 ...

Vi vill skärpa elevernas iakttagelser ytterligare. En elev får uppmaningen "stå upp". Nästa "sitt kvar", tredje "stå upp" osv. Nu måste var och en hitta sin egen roll. Med ett jämnt antal i ringen är mönstret färdigt när vi gått varvet runt. Med

Utbildningen syftar till att utveckla elevens intresse för matematik och möjligheter att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer. Den skall också ge eleven möjlighet att upptäcka estetiska värden i matematiska mönster, former och samband samt uppleva den tillfredsställelse och glädje som ligger i att kunna förstå och lösa problem.

(Skolverket 2000)

Gestaltning av mönster.



Hur många prickar har en gepard?



udda antal förändras rollerna hela tiden, en ständig aktivitet. Den pågående rörelsen gör elevernas vaksamhet stor.

Nedersta bilden på föregående sida visar mönstret: *sitt, stå på knä, stå upp* ... Hur kan det fortsätta? Eleverna menar att de kan se de tre första som en del, då ska den upprepas. Kanske ska eleven som kommer efter den som står upp, stå på knä och nästa igen sitta. Beroende på vilka villkor vi lägger fast, kan mönstret se olika ut. Symboliseringen hålls fast. Det kan vara 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... osv eller 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, ... osv.

Vi studerar kläder och textilier. Eleverna beskriver mönstren med sina symboler. Vi arbetar parallellt med att konstruera olika mönster med tex logiska block, knappar, kriter mm, i form och färg. Mönstren fortsättes och dokumenteras.



Eleverna har färg och form i en bestämd kombination att reflektera över. De ser en växelvis upprepning av röda kvadrater och gula trianglar. De använder logiska block som mallar för dokumentationen. Antalet former varierar. Formerna klistras på remsor. Kan vi sätta ihop dem? Vid skarvar måste former läggas till eller tas bort om det ska stämma. Till sist har vi en sluten slinga. Den hänger i taket länge.

Ylva blir frustrerad när hon upptäcker att hennes färger är omvända mot förebilden. Vad ska hon göra? Kamrater menar att hon gjort en variant av mönstret, men Ylva vill ha samma lösning. Vi hjälps åt att göra en remsa till. "Din lösning kan vara en annan mönsteruppgift, där färgerna är tvärtom." Ylva är nöjd med det. Det är viktigt att en egen lösning passar in i helheten. I det fortsatta arbetet är både elever och vuxna mer vaksamma.

Vi fortsätter med dynamiska klappmönster i ringen: handklapp, knäklapp, handklapp, knäklapp, knäklapp, handklapp, knäklapp, knäklapp, knäklapp, handklapp ... Eleverna funderar. De visar sina lösningar och beskriver 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2...

Det är svårt att hålla isär antalet delar och olika komponenter. Att berätta med ord fungerar men är inte lika praktiskt. Pelle har en ny idé. "Vi kan använda bokstäver istället för siffror. Den första delen kallar vi A, nästa B och C ..." Kamraterna prövar. Först anger de varje bokstav A B A B B A B B B ... Efterhand rationaliserar de, A B A 2B A 3B osv. Detta är hanterbart och praktiskt. Eleverna inser att rörelse-, färg-, form är olika sätt att uttrycka samma mönster. (En mer utförlig beskrivning av detta finns i Nämnaren 1996:2, s 6-10).

Något senare i åk 1:

Här ser du de två första figurerna i en följd. Hur ser figur 3 ut? Figur 10? Vilket är mönstret?



Eleverna arbetar med rutpapper, ca 2x2 cm. När vi använde centimeterrutat papper såg vi att det var svårt att hantera motoriskt. En viktig aspekt att fundera på är om materialet ger stöd i att lösa uppdrag och utmaningar. De funderar. Vad är lika, olika? De koncentrerar sig på att markera rutor och klippa. Snart ser vi att de uppfattar olika saker och betonar att de ska förklara hur de tänkt och argumentera för sin egen lösning.

Karin skriver:

NU KANRSA NIUNRARHRU ALTNG
HNGER IHOPHUR STÖDET KOM DIT JOV
DET KOM TIL SÅ HER IFALDET INTEHAR
STÖDET SÅVAJAR DET OMKUL

Mönsterslinga med olikfärgade cirkclar.

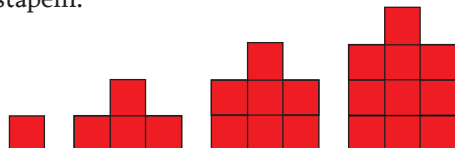




dvs "Nu kanske ni undrar hur allting hänger ihop hur stödet kom dit jo det kom till så här ifall det inte har stödet så svajar det omkull." Hon visar att figur 1 finns i botten på stapeln i varje figur. Stapeln blir en ruta högre för varje figur. Andra elever har andra lösningar:

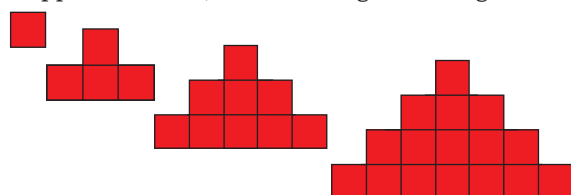


Per berättar: "DKMER NRUT TIL I ÄNDN". "Det kommer en ruta till i ändan". Figur 1 finns i botten på stapeln.

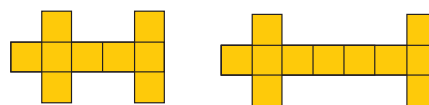


För Marika är figur 1 toppkvadraten på de följande figurerna, det "växer ut en våning" för varje.

Paul berättar att figuren växer i botten som en trappa. En rad till, två rutor längre än föregående.

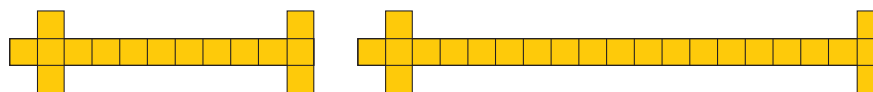


Eleverna överraskades och fascinerades av att de uppfattade sambandet mellan figur 1 och 2 olika. Det är tankeväckande att lärarstudenter i en studie med samma utgångsfigurer såg och beskrev samma variation i fortsättningen (Jaworskij, 1996).



Detta är två figurer i en följd. Hur ser figur 5 och figur 10 ut. Vilket är mönstret?

Eleverna uppfattar figurerna som djur, med nosen åt vänster. Skillnaden finns på magen. De flesta ser figurerna som nr 1 och 2 i serien och menar att den växer med två rutor. Gabriel har en annan uppfattning. JAG TYKER AT MAGEN BLIR DBELT SÅ LÅN JAG NRAR HR LAN TIAS MAG R FR DN PLAS HRINÄ: "Jag tycker att magen blir dubbelt så lång. Jag undrar hur lång tians mage är. Får den plats härinne?" Här är Gabriels figur 3 och 4:



Gabriel tänker multiplikativt. Han berättar och jag skriver mönstret med symboler.

- Fig1: 1×2
- Fig2: 2×2
- Fig3: $2 \times 2 \times 2$
- Fig4: $2 \times 2 \times 2 \times 2$
- Fig5: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
- Fig10: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

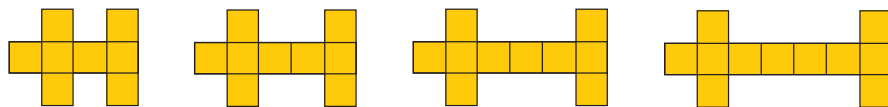
Hur många rutor är magen på den tionde figuren? Gabriel använder miniräknaren, 1024. Han kan inte läsa det stora talet. Jag läser *ettusentjugofyra*. Vad betyder det? Kan vi ta reda på om figur 10 får plats i rummet? Eleverna gör remsor av rutpapper, hundra i varje. Hur många behövs? Ellen vet att tio hundringar är tusen. Remsorna får plats i den långa korridoren.

Gabriel påpekar att "huvudet" och "stjärten" inte är med. Det blir tre rutor till, 1027 rutor. Elever mäter med måthjulet, mer än 20m. Om det varit ett riktigt djur hade den behövt fler ben, "annars släpar magen i marken". Alla inser hur Gabriel tänker. Senare följer vi upp hur det skrivs i potens: 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , osv.



Vi arbetar också med hur andra figurer växer. På bilden är det en följd av giraffer.

Hur många prickar har en gepard?



Olof säger att vi inte vet vilka nummer i följden figurerna har. De kan vara nr 2 och nr 4. I så fall kanske magen växer med en ruta för varje figur.

Främsta drivkraft bakom de matematiska framstegen är inte det logiska tänkandet utan fantasin.
A. de Morgan (1806-1871)

3, 4, 6, 9, 13, 18...
1, 9, 25, 49, 81 ...
66, 22, 21, 7, 6, 2...
2, 6, 5, 15, 14, 42...
1, 11, 121, 12321, ...
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

I den sista följden är varje tal summan av de två närmast föregående. Den är uppkallad efter Leonardo Fibonacci, som på 1200-talet använde följden för att beskriva kaninens förökning. Talet i frimärkets valör är ett Fibonacci-tal.



Olika funderingar och lösningar utvecklar och berikar tänkandet. Eleverna inser att lösningar kan vara olika för att de grundar sig på skilda antaganden. Vi pratar om orsak och verkan, "om ... så". När de lyssnar till kamraters förklaringar växer respekten för olika sätt att resonera. "Rätt" och "fel" får minskat utrymme.

Talmönster

Vi arbetar ofta med talmönster. I uppbyggnad av tabeller är mönster en självklar utgångspunkt. Det är viktigt att eleverna uppfattar relationer inom och mellan tal. Efterhand tar vi med svårare talmönster. Vi ger elever möjlighet att upptäcka talföljder, dubbleringar, halveringar, tillväxt i kvadrater och kuber, *Fibonacci*. Vår erfarenhet är att elever tycker det är spännande att utforska relationer mellan tal som de i marginalen.

Eleverna fascinerar av att hitta mönster, helst flera och följa dem till riktigt stora eller små tal. Det är spännande att få fram tal i bråk- och decimalform och negativa tal, men också följder som kan uttryckas med potenser.

Följande exempel är hämtat från åk 5:

200, 100, 50, 25, ... Vilka tal följer?

Eleverna ser snabbt att talen halveras. Närmast kommer $12\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{8}$. Därefter är utmaningen större. De resonerar med varandra. Vad är hälften av $3\frac{1}{8}$? Hälften av 3, är $1\frac{1}{2}$. Många vet att $\frac{1}{16}$ är

hälften av $\frac{1}{8}$. Hur uttrycker man $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$? Några funderar över hur många 16-delar som är lika mycket som $\frac{1}{2}$. De påminner varandra om arbetet med bråktårtorna. Sambandet klarnar, $\frac{8}{16}$ är en halv. Hälften av $3\frac{1}{8}$ måste vara $1\frac{1}{16}$. Längre än så kommer inte gruppen som helhet.

Några särskilt intresserade fortsätter. Hälften av 1 är $\frac{1}{2}$, hälften av $\frac{1}{16}$? De tänker i hälften så stora delar som sextondelar. Krister är van att läsa noter. Helnoter, halvnoter, fjärdedelar, åttondelar osv. Sambandet mellan musikens och matematikens notationssystem blir tydligt. Erfarenheter från ett annat sammanhang ger idéer. Värdet $\frac{9}{16}$ kan också skrivas som $\frac{18}{32}$. Krister menar att om $\frac{1}{2}$ också uttrycks som delar med nämnaren 32 har de $\frac{16}{32} + \frac{18}{32}$, alltså $\frac{34}{32}$ som ska halveras. Det blir $\frac{17}{32}$, de säger också "drygt en halv".

De fortsätter $\frac{17}{64}$, $\frac{17}{128}$, $\frac{17}{256}$. När de kommer hit menar de att hur långt de än fortsätter, kommer det alltid att vara 17 av den aktuella bråkdelen. När de berättar för kamraterna inser de att något inte stämmer. De reviderar sin lösning. De gör om $\frac{19}{16}$ till $\frac{25}{16}$ – hälften så stora delar innebär hälften av $\frac{50}{32}$, $\frac{25}{32}$. Hälften av det måste då vara $\frac{25}{64}$. Därefter $\frac{25}{128}$. Ursprungliga tanken om en generell andel stämmer, men den ska vara 25, inte 17.

En annan grupp väljer att följa mönstret i decimalform. 12,5 är hälften av 25. Fortsatt halvering ger 6,25, 3,125. Hälften av 3,125, vad är det? Hälften av 3 är 1,5. Vad är hälften av 0,125? Albin menar att 125 hundradelar är detsamma som 1250 tusendelar. Hälften av det är 625 tusendelar. Hur skriver man det? Diskussionen leder till 1,5 och 625 tusendelar. De diskuterar värdet av de enskilda talen och beslutar sig för att skriva 1,5 som 1,500. När de då lägger samman 1,500 och 0,625 inser de att något blivit fel. Summan av de två talen är mer än 2, det kan inte stämma. De går tillbaka till sina

anteckningar och funderar. De kommer fram till att hälften av 0,125 eller 0,1250 är 0,0625. De lägger ihop 1,5 och 0,0625. För säkerhets skull skriver de 1,5000. Hälften av 3,125 är 1,5625.

Linus funderar över hur det blir om talmönstret utgår från 200 000.

Vi tänker att det är pengar. Då är hälften 100 000 kr. Sedan 50 000 kr, 25 000 kr, 12 500 kr, 6 250 kr, 3 125 kr, 1 562,5 – alltså ettusen femhundra sextiotvå och femtio.

Hälften av det är ... hälften av tusen – femhundra; hälften av femhundra – tvåhundra femtio; hälften av sextiotvå – trettioen och hälften av femtio öre – tjugofem öre ... Sjuhundra femtio och trettioen och tjugofem: sjuhundra trettioen och tjugofem.

Han kopplar resonemanget till ursprungsproblemet. Hur mycket är då hälften av 1,5625? Linus och Olof enas om att det måste vara enbart decimaler: 0,78125. Kan det stämma? "Vi kollar med miniräkaren," säger Olof. Det stämmer.

De båda gruppernas talmönster ser olika ut:

200, 100, 50, 25, $12\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{8}$, $1\frac{9}{16}$, $\frac{25}{32}$, $\frac{25}{64}$, $\frac{25}{128}$

200, 100, 50, 25, 12,5, 6,250, 3,125, 1,5625, 0,78125

Det är svårt att se om det är samma följd. De har uttryckt delar av helheter på olika sätt. Att 0,78125 är lika mycket som $\frac{25}{32}$ är inte lätt att se. Krister säger att båda två är ungefär $\frac{3}{4}$. 0,750000 är tre fjärdedelar. $\frac{24}{32}$ är tre fjärdedelar. Kanske börjar de se relationer mellan bråk och decimaltal?

Mönstret 1, 8, 27, 64 är svårt länge. Eleverna ser inte hur talen hänger samman. Efter arbetet med tredimensionella representationer av kuber diskuterar vi vilka volymer den växande följdens har. Då faller mönstret på plats.

Vi observerar att kuberna har samma bredd, längd och djup. Den minsta kuben är en enhet åt tre håll. $1 \times 1 \times 1$. Eftersom vi tidigare uttryckt 1×1 som 1^2 reflekterar några elever över möjligheten att $1 \times 1 \times 1$ kanske följer samma mönster, 1^3 . I så fall kan de följande storlekarna av kuber skrivas 2^3 , 3^3 , 4^3 , ...

Eleverna har byggt solida kroppar av kuber. De har använt olika stora kuber vid olika tillfällen. Gemensamt för de olika kropparna var att oavsett vilken storlek de små kuberna hade, behövdes det lika många för att konstruera följande storlekar. För att beskriva kubers specifika volym måste däremot volymenheten bestämmas av den minsta byggstenens volym.

Elever som byggt kuber med 1cm^3 -klossar skriver:

- I 1:an får det plats 1cm^3*
- I 2:an får det plats 8cm^3*
- I 3:an får det plats 27cm^3*
- I 4:an får det plats 64cm^3*
- I 5:an får det plats 125cm^3*
- I 6:an får det plats 216cm^3*
- I 7:an får det plats 343cm^3*
- I 8:an får det plats 512cm^3*
- I 9:an får det plats 729cm^3*
- I 10:an får det plats 1000cm^3*

De jämför kuberna:

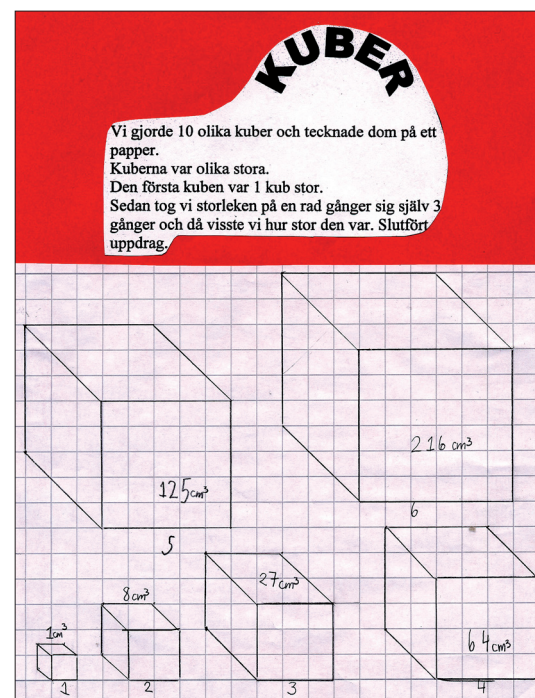
Den största är 1000 gånger så stor som den minsta.

Den 5:e är $\frac{1}{8}$ av den största.

Den 9:e är 27 gånger så stor som den 3:e.



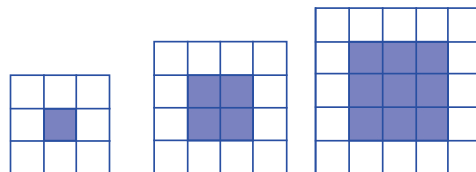
Kubtorn av två slag.



Hur många prickar har en gepard?

Mönster som tema

I åk 6 var mönster vårt tema under en period.
Exempel på uppdrag:



Här ser du figur 1, 2, och 3 i en serie. Hur ser figur 4 och 5 ut? Gör en tabell som visar hur många ljusa och hur många mörka rutor varje figur består av. Använd tabellen för att komma fram till hur många ljusa och mörka rutor det finns i figur 10, 15 och 100.

Elever samarbetar, i par eller 3–4 st. De flesta ser gruppen som resurs där de kan pröva idéer. De får uppmuntran men förslag blir också ifrågasatta. Tankar och argument utmanas. Det är lätt att tänka ut hur följande figurer ser ut. Kvadratens tillväxt har de arbetat med tidigare. Tabellen ger en bra överblick och talmönstren framträder tydligt.

Figur nr	Mörka	Ljusa
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24

De beskriver mönstren på olika sätt:

Mörka rutor: Figurens nummer gånger sig själv.

Ljusa rutor: Lägg till fyra för varje figur.

Mörka fält: Figur 1 är 1^2 , sedan 2^2 , 3^2 osv.

Ljusa fält: Ökar med 4 för varje figur.

Mörka fält: Figurens nummer gånger sig själv.

Ljusa fält: 8, 12, 16, 20. Ökar med fyra i taget.

Dom vita ökar hela tiden med fyra.

De mörka ökar med nästa udda tal.

De mörka: Ordningstalet gånger sig själv.

De ljusa: Ordningstalet + 1 gånger fyra.

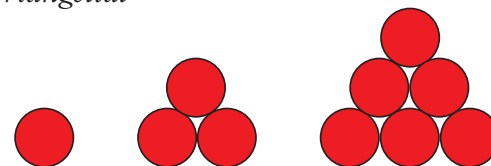
Varje figur växer med en rad på höjden och en på bredden. I figur 100 är det $102 \times 102 = 10\,404$. Då är 10 000 mörka (100×100) och alltså $102^2 - 100^2 = 404$ ljusa.

Elevernas beskrivningar ger inspiration. Vi går vidare för att hitta ett algebraiskt uttryck. Jag berättar att n används för att beskriva vilket positivt heltal som helst. Hur kan vi använda det för att beskriva våra upptäckter? Efter diskussion föreslår de att n kan vara numret på figuren.

Då är de svarta n^2 och de vita $(n+2)^2 - n^2$. De vita kan också beskrivas som $4(n+1)$.

Vi har arbetat något med användning av parenteser. Nu ser eleverna en konkret och tydlig nytta med det. Vi diskuterar vad noteringen betyder utan parenteser, $n+2^2$ och $4n+1$, det är inte vad eleverna menar.

Triangeltal



Talen 1, 3, och 6 är exempel på triangeltal.

Vilket triangeltal följer närmast efter talet 6?

Vilket är det tionde triangeltalet?

Sök efter mönster som hjälper dig att förutse fler triangeltal.

En droppe droppade i
livets älv
Har inte kraft att lyfta sig
själv
Det finns ett krav på varje
droppe
Hjälp till att hålla
varandra oppe
Tage Danielsson

Eleverna beskriver:

Om man tar figur 4 så är det 4 i basen.

Triangelstal 4: $4+3+2+1=10$

I figur 10 är det 10 i basen.

Triangelstal 10: $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$

1:a $0+1=1$

2:a $1+2=3$

3:e $1+2+3=6$

4:e $1+2+3+4=10$

Antalet i föregående figur + den nya figurens grund = det nya triangeltalet. Grunden ökar med ett varje gång.

Hur kan ett generellt uttryck se ut? Eleverna diskuterar och föreslår:

Ordningstalet i följen anger antalet punkter i triangelns bas och antalet "våningar" i triangeln.

T8 (det åttonde triangeltalet):

$8+7+6+5+4+3+2+1=36$

Elever fascinerar av generella beskrivningar. Deras intresse och engagemang att söka sådana är stort. De förvånas över min fråga om matematiska mönster har med verkligheten att göra. Eftersom vi så ofta använt vardagssituationer som utgångspunkt för olika undersökningar, menar de att det säkert finns sådana här också.

Vilket mönster hittar du?

Elever i sexan undersöker hur många handslag som behövs för att alla ska ha hälsat på alla i klassen. De inleder med att fundera på hur många handslag som behövs när två hälsar på varandra:

Hur är det om tre ska hälsa på varandra? Fyra, fem? Alla i klassen? För in resultaten i en tabell. Vilket mönster hittar du?



I den övre bilden ser vi en elev som färglagt kvadrater som visar summan av de fem första udda talen.

$1+3+5+7+9$ är 25 – dvs 5 i kvadrat. Färger på tal och småkvadrater hör ihop.



Här är torn med färgburkar. De mindre burkarna följer inte riktigt triangeln, varför inte? Hur många stora burkar finns det?



Hur många prickar har en gepard?



Det finns en avsikt med att använda en tabell, den ger åskådlighet över samband. Eleverna behöver fungerande verktyg. De arbetar delvis praktiskt. Resultaten förs in i tabellen.

Antal kompisar	Antal handslag
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21

Mönstret som framträder är triangeln. För att få fram antalet handslag, när alla 29 elever i klassen har hälsat på varandra, kan vi bestämma värdet av triangeln 28:

$$28 + 27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 406$$

Summan av alla talen mellan 1 och 28 kan vi beräkna genom att lägga ihop första och sista (28 och 1) andra och näst sista (27 och 2) osv. Alla dessa summor är 29 och antalet summor är $28/2$ st. Denna summa är alltså $29 \times 28/2$. Detta är början till en generell formel för summan av de första positiva heltalen: $(n + 1) \times n/2$.

Var och en av de 29 eleverna ska hälsa på 28 andra. Det blir 29×28 handslag, men i varje handslag klaras två hälsningar av, så det behövs hälften så många $29 \times 28/2$. Jämför resonemanget med elevtexten härintill.

Den stora ökningen är oväntad och det stora antalet 406 fascinerar. Flera tycker att det kan vara ett intressant problem för släktingar och vänner. Julen råkar ligga nära i tid och många ska träffas på släktkalas.

Vill du bli miljonär?

Alla i klassen vill det. Men hur? Hur lång tid tar det? Eleverna diskuterar lotterier, spel på hästar, tips, aktier och annat. Chansen är inte särskilt stor.

Det ger uppslag till frågeställningar om sannolikheter, som vi arbetar med senare.

Du erbjuder dig att ta hand om disken, bädda allas sängar eller dammsuga hemma mot en viss ersättning. Det enda du önskar dig är att första dagen få en krona och för varje följande dag dubbelt så stor ersättning. Hur lång tid tar det tills du blir miljonär?

Flera elever tycker att det verkar för jobbigt. Det måste ju ta hur lång tid som helst. De tänker på en tidigare undersökning om en miljon. Vi kom då fram till att om vi räknar oavbrutet ett tal per sekund, tar det nästan 12 dygn.

Men vi kan väl räkna på det. Elevernas samarbetar. Till en början använder de enbart huvudräkning. Några grupper skriver $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ osv och parallellt beräknar de den totala förtjänsten. Dag fem är den 31 kr, enligt ovan.

Andra grupper skriver bara aktuell förtjänst, 1, 3, 7, 15, 31 osv. Flera tappar så småningom bort sig.

Parallellräkningen blir alltför svår och talområdet större än de kan överblicka. De inser att det är nödvändigt att ha en strukturerad skriftlig dokumentation, för att ha kontroll. De som uppfattar det multiplikativa mönstret, har bäst överblick. Miniräknaren blir ett nödvändigt hjälpmedel. En av grupperna skriver så här:

Dag 1	1 kr		
Dag 2	2 kr		
Dag 3	4 kr	2×2	
Dag 4	8 kr	$2 \times 2 \times 2$	Summa:
Dag 5	16 kr	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	31 kr
.....			

Dag 17 65536 kr $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

131071 kr

Ungefär här utbrister Sten: "Oj så snabbt det växer nu. Det kan inte vara många dagar kvar!" Det ger ny energi. Att en grupp är nära att lösa problemet, sätter fart på tävlingsinstinkten hos andra.

Dag 18 131072 kr $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

262143 kr

Dag 19 262144 kr $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

524287 kr

Nu inser gruppen att målet, en miljon kronor kommer att nås följande dag. Men i själva verket är den efterfrågade summan över en miljon dag 19.

Dag 20 524288 kr $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

1048575 kr

Linus kommer ihåg att detta går att skriva i potensform. Han menar först att det kan skrivas $2^{19} + 1$, men glömmer summera bakåt. Dag 1 är förtjänsten 1 kr, sedan dubbelt så mycket dag för dag, det blir i själva verket $2^{20} - 1$. Utifrån hans inlägg kan samtalet leda vidare till en generaliserad, algebraisk formel.

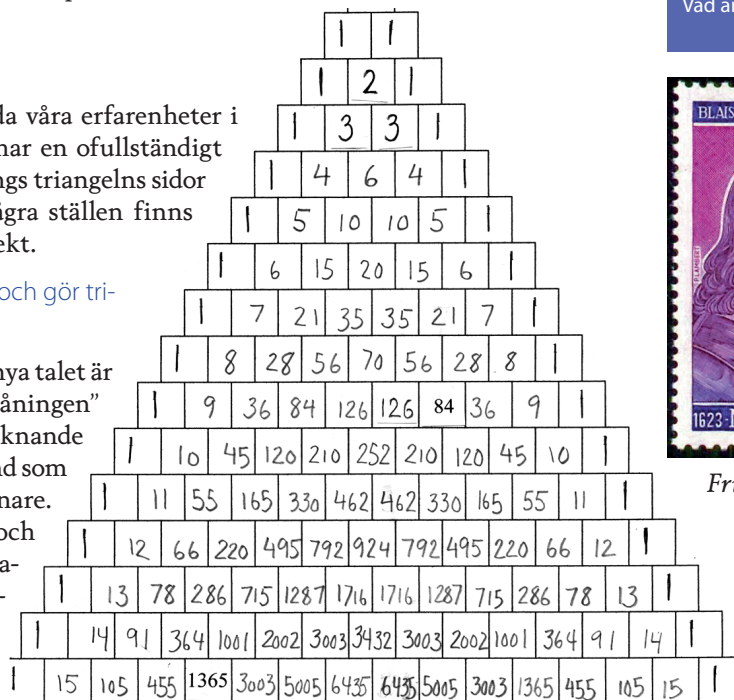
Förvåning och förtjusning över resultatet är tydlig. Tänk att det kan gå så fort! Eleverna får en aning om konsekvensen av exponentiell tillväxt.

Pascals triangel

Mönstertänkande är förankrat. Kan vi använda våra erfarenheter i Pascals triangel i åk 6? Den första uppgiften har en ofullständigt ifylld triangel, med sexton "våningar". Talen längs triangelns sidor är ifyllda samt de fyra översta raderna. På några ställen finns "kontrolltal" som visar om vald strategi är korrekt.

Vilka tal fattas i de tomma rutorna? Sök mönstret och gör triangeln klar. Beskriv mönstret.

Eleverna diskuterar. Efterhand inser de att det nya talet är summan av de två tal som gränsar till rutan, i "våningen" ovanför. Flera har arbetat med problem med liknande strategi. Det är mycket huvudräkning. Efterhand som talen blir större använder de flesta miniräknare. Kontrolltalen indikerar om strategin håller och om beräkningarna är korrekta. Om kontrolltalet 1365 i den nedersta raden stämmer, bör övriga beräkningar stämma. De jämför spontant med varandra. De flesta upptäcker tidigt att triangeln är symmetrisk. Talen finns på



Pascals triangel är ett schema, namngivet efter Blaise Pascal (1623–1662), fransk matematiker och fysiker. Varje rad börjar och slutar på 1 och varje tal inne i schemat är summan av de två närmsta talen ovanför. Koefficienterna från våning 3 uppifrån finner du i utvecklingarna av:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Vad är $(a + b)^4$ enl mönstret?



Frimärke från Monaco, utgivet 350 år efter Pascals födelse.

Nationellt Centrum för Matematikutbildning