PROBLEMLÖSNING NÄR DEN ÄR SOM BÄST

Workshop 28–29 april 2009

Problem 1. Givet är den konvexa fyrhörningen $ABCD$. Punkterna M, P, N, Q är mittpunkter på respektive AB, BC, CD, DA. Fyrhörningarna $AMND, MBCN$, $BPQA$ och $PCDQ$ har alla samma area. Visa att $ABCD$ är en parallellogram.

Problem 2. Bestäm alla a sådana att ekvationen

$$x^2 + 2x + 10 - 12a + 4a^2 = 0$$

har minst en reell rot.

Problem 3. De tre räta linjerna l, m, n är parallella. Avståndet mellan l och m är 4, avståndet mellan m och n är 3 och m ligger mellan l och n. En kvadrat har tre av sina hörn på var sin linje och ligger mellan l och n. Finn kvadratens sidlängd.

Problem 4. Ett antal blommor fördelas mellan n personer så att den förste av dem (Andreas) får en blomma, den andre får två, ..., den n-te får n blommor. Andreas går sedan runt och skakar hand en gång med var och en av de övriga, i godtycklig ordning. Därvid får han en blomma från var och en som har fler blommor än han i det ögonblick de skakar hand. Hur många blommor kan Andreas ha som minst när han har skakat hand med alla?

Problem 5. En fyrhörning är inskriven i en cirkel med radie 1. Visa att fyrhörningens omkrets är mindre än eller lika med $4\sqrt{2}$.

Problem 6. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = 1 + \ln y \\ y = 1 + \ln z \\ z = 1 + \ln x \end{cases}.$$

Problem 7. Finn alla icke-negativa lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - yz = x \\ y^2 - zx = y \\ z^2 - xy = z \end{cases}.$$

Problem 8. Givet är en spetsvinklig triangel. Två cirklar ritas med två av triangelns sidor som diametrar. Visa att en av cirklarnas skärningspunkter ligger på triangelns tredje sida.